(3) لتكن الحلقة البوليانية $P(E)$ حيث E فضاء طبولوجي. من أجل أي عنصر $x \in E$ فإن $\mathcal{V}(x)$ أسرة الجوارات للنقطة x تكون مرشحة في $P(E)$ وهذا ينتج مباشرة من تعريف الجوارات.

من المعروف أن x تكون نقطة منعزلة إذا كانت $\{x\}$ جوارة للنقطة x. كي تكون $\mathcal{V}(x)$ مرشحة أعظمية يلزم ويكفي أن تكون x نقطة منعزلة وذلك لأنه

- إذا كانت x منعزلة فإذا كان $A \notin \mathcal{V}$ فإن $x \notin A$ لأنه لو كانت $x \in A$ و x منعزلة أي أن $\{x\}$ جوارة للنقطة x و $x \in \{x\} \subseteq A$ وهذا يعني أن A جوارة لـ x وهذا خلاف الفرض.

$\Leftarrow x \notin A$ و $x \in \{x\} \subseteq C_A$ أي أن C_A جوارة للنقطة x أي أن $C_A \in \mathcal{V}(x)$ حسب المبرهنة السابقة $\mathcal{V}(x)$ مرشحة أعظمية.

العكس:

لنفرض أن $\mathcal{V}(x)$ مرشحة أعظمية ولنفرض جدلا أن x ليست نقطة منعزلة أي أن $\{x\}$ $\{x\} \notin \mathcal{V}(x) \Leftarrow$ حسب المبرهنة السابقة $C_{\{x\}} \in \mathcal{V}(x)$ وهذا غير ممكن لأن الفرض الجدلي خاطئ أي أن x نقطة منعزلة.

«المورفيزمات والمثاليات والمرشحات»

لتكن A, B حلقتين بوليانيتين و f مورفيزم بولياني من A في B

مبرهنة:

① إذا كانت F مرشحة في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون مرشحة في A

② إذا كانت I مثالية في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون مثالية في A

البرهان:

① بفرض أن F مرشحة في B فإن $f(1) = 1 \in F \Rightarrow 1 \in f^{-1}(F)$

• بفرض أن $x \in f^{-1}(F)$ و $y \geq x$ $\Rightarrow f(x) \in F$ و $f(y) \geq f(x)$ (لأن f مورفيزم بولياني متزايد) ولكن F مرشحة في B $\Rightarrow f(y) \in F \Rightarrow y \in f^{-1}(F)$

• بفرض $x \in f^{-1}(F)$ و $y \in f^{-1}(F) \Rightarrow f(x) \in F$ و $f(y) \in F$ ولكن F مرشحة $\Rightarrow f(x)f(y) \in F \Rightarrow f(xy) \in F \Rightarrow xy \in f^{-1}(F)$ مباشرة

$f^{-1}(F)$ تكون مرشحة في A

② نفرض أن I مثالية في B فإن

• $f(0)=0\in I \Rightarrow 0\in f^{-1}(I)$ لأنه بوليان مورفيزم

• نفرض أن $x\in f^{-1}(I)$ و $y\leq x \Rightarrow f(x)\in I$ و $f(y)\leq f(x)$ ولكن I مثالية في B $\Rightarrow f(y)\in I \Rightarrow y\in f^{-1}(I)$

• نفرض أن $x\in f^{-1}(I)$ و $y\in f^{-1}(I) \Rightarrow f(x)\in I$ و $f(y)\in I$ و I مثالية في B $\Rightarrow f(x)\vee f(y)\in I \Rightarrow f(x\vee y)\in I \Rightarrow x\vee y\in f^{-1}(I)$ وبالتالي ينتج أن $f^{-1}(I)$ مثالية في A

ملاحظات مع البرهنة

① $f^{-1}(\{1\})$ تكون مرشحة في A

② $f^{-1}(\{0\})$ تكون مثالية في A

③ إذا كانت F مرشحة فعلية في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون أيضاً مرشحة فعلية (نتيجة مشابهة للمثالية) وذلك لأنه إذا كانت F مرشحة فعلية في B فإن $0\notin F \Rightarrow 0=f^{-1}(0)\notin f^{-1}(F)$.

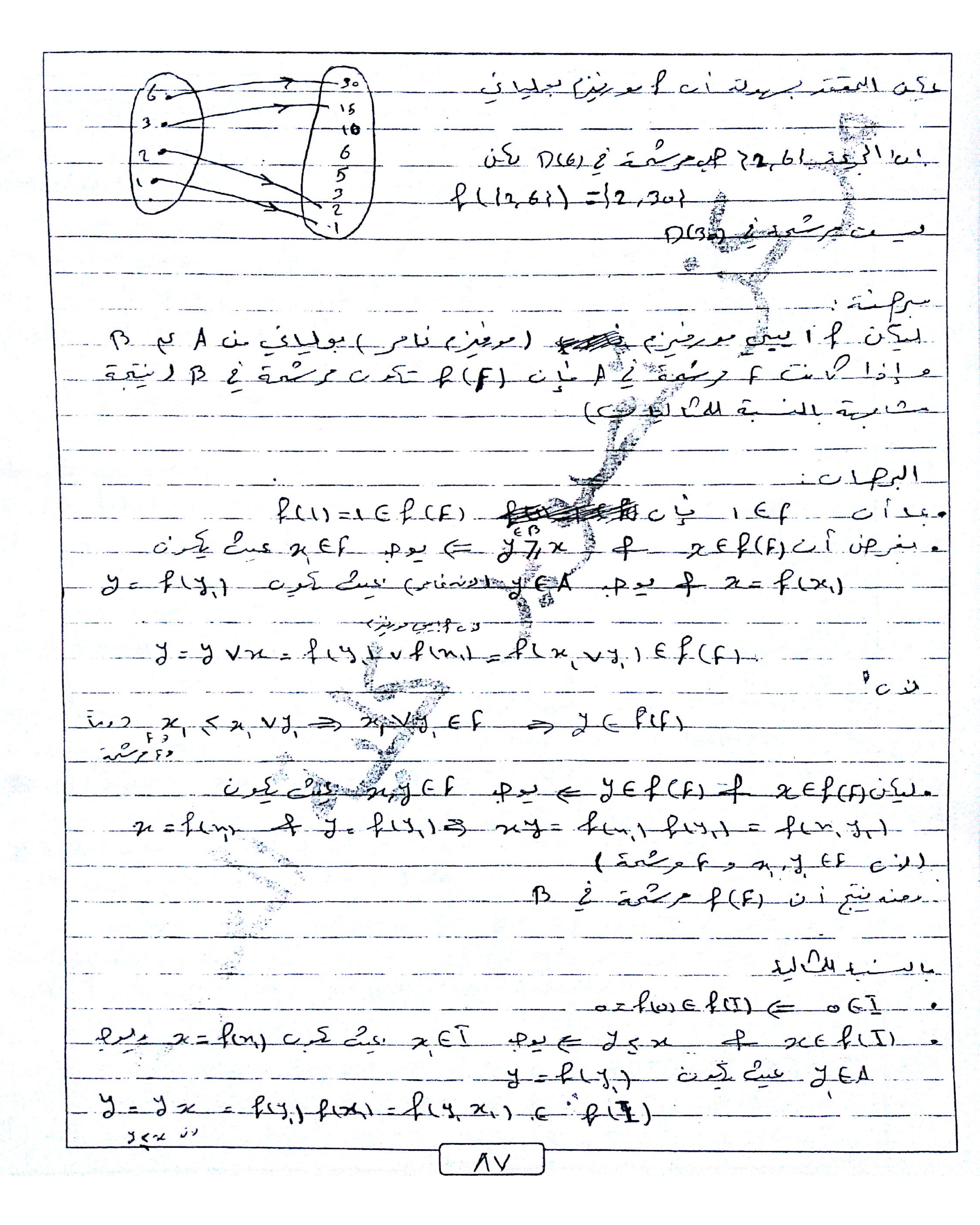
④ إذا كانت F فوق مرشحة في B فإن $f^{-1}(F)$ تكون فوق مرشحة في A (نتيجة مشابهة للمثالية) وذلك لأنه نفرض أن $x\notin f^{-1}(F) \Leftrightarrow f(x)\notin F \Rightarrow f(x')=(f(x))'\in F \Leftrightarrow x'\in f^{-1}(F) \Leftrightarrow$ حسب برهانه $f^{-1}(F)$ فوق مرشحة

⑤ في الحالة العامة إن الصورة المباشرة لمرشحة (أو مثالية) في A ليست بالضرورة مرشحة (أو مثالية) في B

مثال:

ليكن f تطبيقاً من D(6) في D(30) معرف بالشكل التالي

$f(1)=1 \quad f(2)=2 \quad f(3)=15 \quad f(6)=30$



يمكن التحقق بسهولة أن f مورفيزم جبليائي

إن الحزمة {2,6} هي مرشحة في D(6) لكن
$f(\{2,6\}) = \{2,30\}$
ليست مرشحة في D(30)

مبرهنة:
ليكن f أبيمورفيزم (مورفيزم تام) بوليائي من A نحو B
وإذا كانت F مرشحة في A فإن f(F) تكون مرشحة في B (النتيجة
مشابهة بالنسبة للمثاليات)

البرهان:
• بما أن $1 \in F$ فإن $f(1) = 1 \in f(F)$
• نفرض أن $x \in f(F)$ و $y \geq x$ $\Leftarrow$ يوجد $x_1 \in F$ حيث يكون
$x = f(x_1)$ و يوجد $y_1 \in A$ (لأنه شامل) حيث يكون $y = f(y_1)$

(لأن f إيبي مورفيزم)

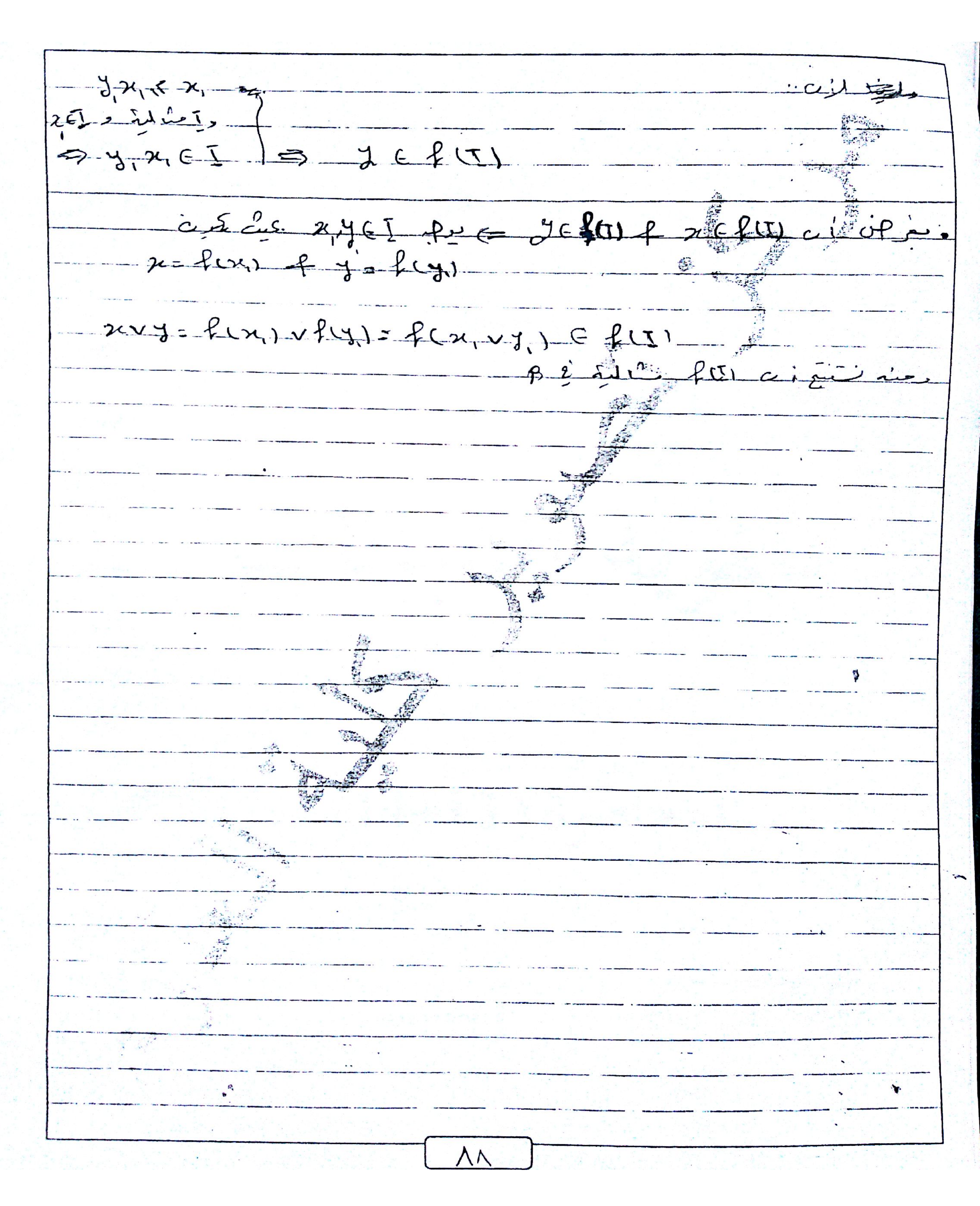
$y = y \vee x = f(y_1) \vee f(x_1) = f(x_1 \vee y_1) \in f(F)$

لأن:

$x_1 \leq x_1 \vee y_1 \Rightarrow x_1 \vee y_1 \in F \Rightarrow y \in f(F)$ لأن F مرشحة

• ليكن $x \in f(F)$ و $y \in f(F)$ $\Leftarrow$ يوجد $x_1, y_1 \in F$ حيث يكون
$x = f(x_1)$ و $y = f(y_1) \Rightarrow xy = f(x_1) f(y_1) = f(x_1 y_1)$
(لأن $x_1, y_1 \in F$ و F مرشحة)
ومنه نستنتج أن f(F) مرشحة في B

بالنسبة للمثالية
• $0 \in I \Leftarrow 0 = f(0) \in f(I)$
• $x \in f(I)$ و $y \leq x$ $\Leftarrow$ يوجد $x_1 \in I$ حيث يكون $x = f(x_1)$ و يوجد
$y_1 \in A$ حيث يكون $y = f(y_1)$
$y = yx = f(y_1) f(x_1) = f(y_1 x_1) \in f(I)$
لأن $y \leq x$



ملاحظة اذن:

$y_1 , x_1 \leq x_1$,
I مثالية و $x_1 \in I$
$\Rightarrow y_1 , x_1 \in I$ $\Rightarrow y \in f(I)$

نفرض أن $x \in f(I)$ و $y \in f(I) \Leftarrow$ يوجد $x_1 , y_1 \in I$ حيث يكون:
$x = f(x_1)$ و $y = f(y_1)$

$x \vee y = f(x_1) \vee f(y_1) = f(x_1 \vee y_1) \in f(I)$

ومنه نستنتج أن $f(I)$ مثالية في B